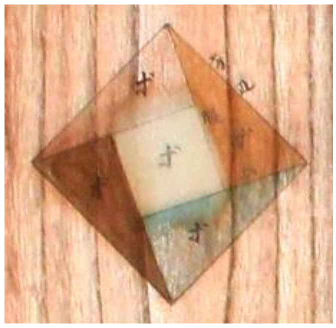
２月　諏訪神社

【第９問】

今有如図方形積五等分之
只云方辺九寸
問鉤及股幾何
答曰鉤四寸〇二余股八寸〇四余
術曰以五個除一個開平方乗方辺得鉤倍之得股合問
（平沢村　星野幸吉）



（題意）辺の長さが９寸の正方形がある。これを、図のように４個の直角三角形と小さい正方形に分け、面積を５等分する。このとき、直角三角形の直角を挟む２辺の長さを求めよ。

（答曰）縦（短辺）: 4.02…寸、　横（長辺）: 8.04…寸

（術曰）縦＝方辺 × $\sqrt{\frac{1}{5}}$ 、横＝縦 × 2　（方辺９寸）

【解説】

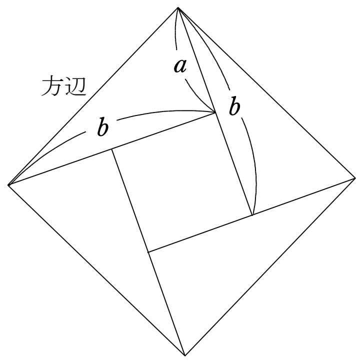
鉤股弦（三平方の定理）の証明の一つに登場する図で、古代中国の書『周髀算経（しゅうひさんけい）』や日本の和算書に見られます。

【解答例】

（１）直角三角形の直角を挟む２辺の長さを $a, b\ (a < b)$ とします。

直角三角形の面積は $\frac{1}{2}ab$

小さい正方形の面積は $(b-a)^2$



題意より、どちらも全体の正方形の面積 $9^2 = 81$ の「５分の１」ですから、

$$\frac{1}{2}ab = \frac{81}{5}, \quad (b-a)^2 = \frac{81}{5} \quad \cdots\cdots (*)$$

よって、　$ab = \frac{162}{5}, \quad b - a = \sqrt{\frac{81}{5}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$　…… ①

また、直角三角形の三平方の定理から $a^2 + b^2 = 9^2$ が成り立ちますから、

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 9^2 + 2 \times \frac{162}{5} = \frac{729}{5}$$

よって、$a + b = \sqrt{\frac{729}{5}} = \frac{27}{\sqrt{5}}$　…… ② となり、

①、②の和と差から　$a = \frac{9}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{18}{\sqrt{5}}$　■

補　足

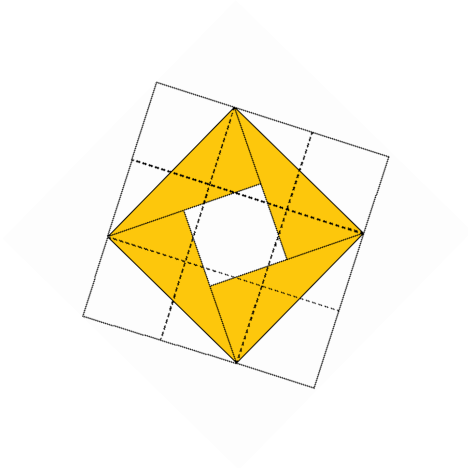
　ここで三平方の定理を用いましたが、(＊)の２つの式から直接 $a^2+b^2=9^2$ を導くことができます。そのことは、問題図そのものが三平方の定理を内包していることを物語っています。

　方辺を c とすると、面積の関係から（５等分に限らず）

$$\frac{1}{2}ab\times 4+(b-a)^2=c^2$$

左辺を展開整理して、$a^2+b^2=c^2$ という等式が成立することが分かります。

（２）問題図は、一回り大きい正方形の折り紙から直角三角形の部分を折って作ったと考えられます。そこで、折り紙を９等分してから図のように折ると（１）の図が得られ、



$$a:b\ =1:2$$

また、直角三角形の三平方の定理から

$$(\text{方辺})^2=a^2+b^2$$

ですから、直角三角形の３辺の比は

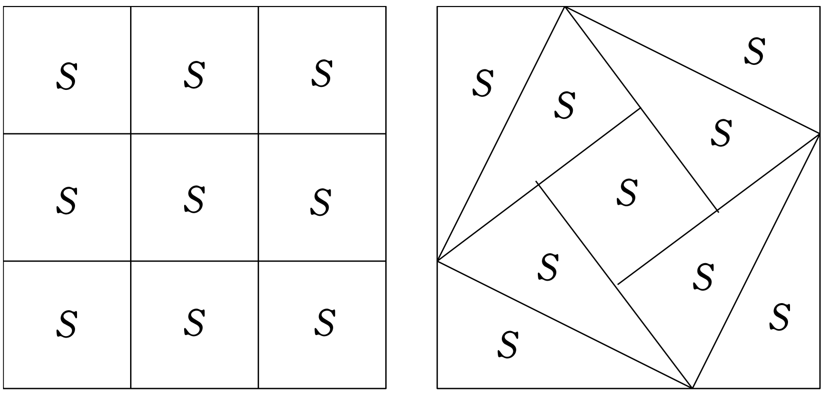
$$a:b:\text{方辺}=1:2:\sqrt{1^2+2^2}=1:2:\sqrt{5}$$

それぞれを $\sqrt{5}$ で割ると、$a:b:\text{方辺}=\frac{1}{\sqrt{5}}:\frac{2}{\sqrt{5}}:1$

方辺は９寸でしたから、それぞれに９を掛けて、$a:b:\text{方辺}=\frac{9}{\sqrt{5}}:\frac{18}{\sqrt{5}}:9$

したがって、$a=\frac{9}{\sqrt{5}}$，　$b=\frac{18}{\sqrt{5}}$　■

※（２）の補足図



（文責：五輪教一）